Beni Hassen

®®®®®®®®®®

2014/2015

Devoir de synthèse n°3

4 M **07/05/2015**

Prof :
M.Mohamed Krir **Durée : 4 h**

<u>EXERCICE N°1:(4 pts)</u>

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions est exacte .Indiquer sur la votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie ,sans justification.

1) Soit l'équation différentielle (E) : y'' + 4 y = 0.Soit f la solution de (E) dont la courbe passe par K(0 , 2) et la tangente en K a pour cœfficient directeur 4.

(a) f(x) = 4 sin(2x) + 2 cos(2x) (b) f(x) = 2 sin(x) + 2 cos(x)

(c) f(x) = 2 sin(2x) + 2 cos(2x).

2) La durée d'attente X , en années, d'un appareil avant la première panne suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda =$ 0,2.

La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des 3 premières années à 10^{-4} prés

(a) 0,5523 (b) 0,5488 (c) 0,4512 (d) 1,0012

3) La droite de régression de Y en X d'une série statistique double est : y = - 5 x + 20,75 .

Le coefficient de corrélation linéaire r est égal à :

(a) 1,01 (b) 0, 99 (c) - 0,93 (d) - 1,03

4) Le tableau suivant donne l'age X en mois et la masse Y en kilogramme d'un enfant durant ses premiers mois.

X	2	3	4	5	9	15
Y	6	6,8	7,5	7,8	10,6	12,4

Le coefficient de corrélation linéaire r de la série (X, Y) est :

(a) 0,8675 (b) 0,9847 (c) 2,3435 (d) – 0, 9999

EXERCICE N°2 :(4 pts)

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = (1 – x) e^{2x}. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}, \vec{j}$).

1) Dresser le tableau de variation de f.

2)a) Prouver que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b) Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point I.

c) Tracer T et $\mathcal{C}$.

3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : x = 0 et x = 1 .

4) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

b) Montrer que pour tout n ∈ N* , on a : 2 I_{n+1} = (n+1) I_n – 1. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

EXERCICE N°3:(4 pts)

Soit (O , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) un repère orthonormé direct de l'espace ξ.On considère les points A(0,0,1) ,B(1,0,1) , C(2,1,-1) et I(-2,1,2).

1)a) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que A , B et C déterminent un plan P dont ont donnera un équation cartésienne

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

d) Déterminer la distance du point C à la droite (AB).

2) a) Prouver que IABC est tétraèdre.

b) Déterminer le volume du tétraèdre IABC .

c) En déduire de ce qui précède la distance de I au plan P.

3) Soit S la sphère de centre I et passant par A. Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle ζ à caractériser.

4)Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\lambda = \frac{1}{5}$.

a) Déterminer l'expression analytique de h .

b) Déterminer (S') image de (S) par h.

c) Déterminer A' = h(A) puis déduire une équation cartésienne du plan P' = h(P).

d) Montrer que S' $\cap$ P' est un cercle ζ ' à préciser le centre et le rayon.

EXERCICE N° 4 :(4 pts)

Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $4x - 7y = 28$

1)a) Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x \equiv 0 \pmod 7$

b) En déduire les solutions de (E).

2) On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$; $x \in \mathbb{Z}$

a) Vérifier que 19 est solution du système (S) .

b) En déduire les solutions du système (S) .

3)a) $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de 3^{6k} modulo 4 et de 5^{6k} modulo 7.

b) Vérifier que 2007 est solution du système (S)

c) Prouver que $2007^{2010} \equiv 1 \pmod{28}$. En déduire le reste modulo 28 de 2007^{2015}.

EXERCICE N° 5 : (4 pts)

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher numérotées 0 , 1 et 2. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules ,on note x le numéro de la première boule tirée et y celui de la deuxième. A chaque tirage de deux boules on associe le point M(x , y) dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). On désigne par D le disque de centre O et de rayon $\frac{17}{10}$.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A :« le point M appartient à l'axe des abscisses » B :« le point M $\in \zeta_{(O,1)}$ »

2) Soit X l'aléa numérique égale à OM^2 .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) Prouver que la probabilité de l'événement « M $\in$ D » est égale à $\frac{4}{9}$.

4) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant les boules tirées dans le sac après chaque tirage . Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants

C : « deux points exactement appartiennent à D »

E : « uniquement le troisième point appartient à D »

et F : « le premier point appartenant à D est celui de la troisième épreuve ».

5) On renouvelle n fois de suite ,de façon indépendante ,le tirage de deux boules successivement et avec remise On obtient n points du plan. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que la probabilité de l'événement G : « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,9999.

BON TRAVAIL